Shiksha Point

# पॉलिटेक्निक

## प्रवेश परीक्षा, पेपर 2009 Solution सलूशन

## संकेत एवं हल

### गणित

**1.** $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1$

**2.** माना $\cos 80°$ समीकरण $8x^3 - 6x + 1 = 0$ का एक मूल है।

तब $8\cos^3 80° - 6\cos 80° + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 8\sin^3 10° - 6\sin 10° + 1 = 0$

$[\because \cos(90° - 80°) = \sin 10°]$

$\Rightarrow -2(3\sin 10° - 4\sin^3 10°) + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad -2\sin 30° + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad -2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = 0$

अतः $\cos 80°$ दी गई समीकरण का अभीष्ट मूल है।

**3.** माना $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°$

अब, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$

$x = 60°$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$\therefore$ $y$, $60°$ पर अधिकतम मान रखता है।

**4.** $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$

$= \frac{\sin 9°}{\cos 9°} + \frac{\sin 81°}{\cos 81°} - \frac{\sin 27°}{\cos 27°} - \frac{\sin 63°}{\cos 63°}$

$= \left(\frac{\sin 9°\cos 81° + \sin 81°\cos 9°}{\cos 9°\cos 81°}\right)$

$-\left(\frac{\sin 27°\cos 63° + \sin 63°\cos 27°}{\cos 27°\cos 63°}\right)$

$= \frac{\sin(9° + 81°)}{\cos 9°\cos 81°} - \frac{\sin 90°}{\cos 27°\cos 63°}$

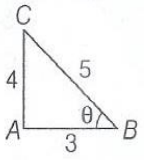
$= \frac{1}{\sin 81°\cos 81°} - \frac{1}{\sin 63°\cos 63°}$

$= \frac{1}{\sin 162°} - \frac{1}{\sin 126°} = \frac{1}{\sin 18°} - \frac{1}{\sin 54°}$

$= \frac{4}{\sqrt{5} - 1} - \frac{4}{\sqrt{5} + 1} = \frac{4\sqrt{5} + 4 - 4\sqrt{5} + 4}{5 - 1} = 2$

**5.** दिया है, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

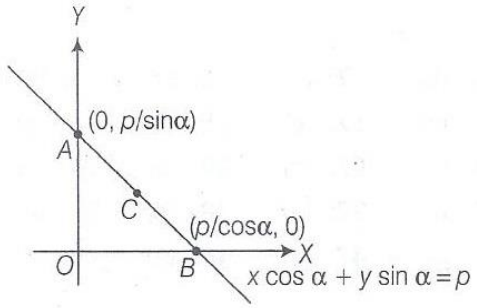
अतः $\tan\theta$ द्वितीय या चतुर्थ चतुर्थांश में होगा।




$\therefore \quad \sin\theta = \frac{4}{5}$ या $-\frac{4}{5}$

**6.** दी गई रेखा की समीकरण $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ है।

माना मध्य-बिन्दु $C$ के निर्देशांक $(h, k)$ हैं।




$$\therefore \quad h = \frac{p}{2\cos\alpha}, k = \frac{p}{2\sin\alpha}$$

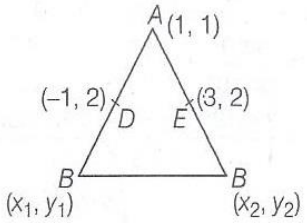
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h} = \frac{2\cos\alpha}{p}, \frac{1}{k} = \frac{2\sin\alpha}{p}$$

अब, $\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{4\cos^2\alpha}{p^2} + \frac{4\sin^2\alpha}{p^2} = \frac{4}{p^2}$

अतः अभीष्ट बिन्दुपथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ है।

**7.** माना $B$ और $C$ के निर्देशांक क्रमशः $(x_1, y_1)$ और $(x_2, y_2)$ हैं।

$D(-1, 2)$ और $E(3, 2)$, $AB$ और $AC$ के मध्य-बिन्दु हैं।




$$\therefore \quad x_2 + 1 = 6,\ y_2 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 5,\ y_2 = 3$$

तथा $\quad x_1 + 1 = -2,\ y_1 + 1 = 4$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -3,\ y_1 = 3$$

$$\therefore \quad \text{केन्द्रक} = \left(\frac{1+5-3}{3}, \frac{1+3+3}{3}\right) = \left(1, \frac{7}{3}\right)$$

**8.** दी गई रेखाएँ संगामी होगी, यदि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = 0$$

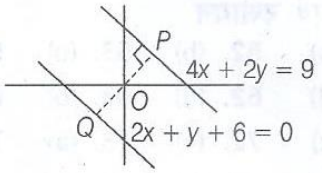
$$(\because C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore a+b+c = 0 \text{ या } \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$$

**9.** मूलबिन्दु $O$ से रेखा $4x + 2y = 9$ की लम्बवत् दूरी

$$OP = \left|\frac{0+0-9}{\sqrt{16+4}}\right| = \frac{9}{2\sqrt{5}}$$




तथा मूलबिन्दु $O$ से रेखा $2x + y + 6 = 0$ की लम्बवत् दूरी

$$OQ = \left|\frac{0+0+6}{\sqrt{4+1}}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \text{अभीष्ट अनुपात} = \frac{OP}{OQ} = \frac{9/2\sqrt{5}}{6/\sqrt{5}} = \frac{3}{4} \text{ या } 3:4$$

**10.** दी गई रेखा की समीकरण निम्न है

$$(2x + 3y + 4) + \lambda(6x - y + 12) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2 + 6\lambda)x + (3 - \lambda)y + 4 + 12\lambda = 0$$

$\because$ रेखा $Y$-अक्ष के समान्तर है।

$$\therefore \quad y = 0 \Rightarrow 3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

**11.** माना रेलगाड़ी की लम्बाई $l$ मी है।

$s_1 = 40$ किमी/घण्टा, $s_2 = 25$ किमी/घण्टा तथा

$T = 48$ सेकण्ड

$$\because \quad T = \frac{l}{s_1 - s_2} \times \frac{18}{5} \text{ सेकण्ड}$$

$$\Rightarrow 48 = \frac{l}{40-25} \times \frac{18}{5} \therefore \quad l = \frac{48 \times 15 \times 5}{18} = 200 \text{ मी}$$

**12.** $A$ का एक दिन का कार्य $= \frac{1}{12}$

$$\therefore A \text{ का 6 दिनों का कार्य} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{शेष कार्य} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$B$ का एक दिन का कार्य $= \frac{1}{15}$

$(A+B)$ का एक दिन का कार्य $= \frac{1}{12}+\frac{1}{15}$

$$= \frac{5+4}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$$

$(A+B)$ द्वारा $\frac{1}{2}$ कार्य को करने में लगा समय

$$= \frac{1/2 \times 1}{3/20} = \frac{20}{2\times 3} = \frac{10}{3} \text{ दिन}$$

$\therefore$ कुल लगा समय $= 6+\frac{10}{3} = \frac{28}{3}$ दिन $= 9\frac{1}{3}$ दिन

**13.** माना मूलधन $(P) = ₹x$

ब्याज दर $(r) = r\%$

$\therefore$ मिश्रधन $(A) = ₹\frac{13}{8}x$

समय $(T) = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ वर्ष

ब्याज $= \frac{13}{8}x - x = ₹\frac{5}{8}x$

$\because$ साधारण ब्याज $= \frac{P\times r\times T}{100}$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{8}x = \frac{x\times r\times 25/4}{100}$

$\therefore \quad r = \frac{5\times 100\times 4}{8\times 25} = 10\%$

**14.** माना रेडियो का वास्तविक मूल्य $= ₹x$

बिक्री कर की दर $= 10\%$

$\therefore \quad 660 = x\times\frac{10}{100}+x$

$\Rightarrow \quad \frac{11x}{10} = 660 \Rightarrow x = \frac{660\times 10}{11}$

$\therefore \quad x = ₹600$

**15.** $(4)^{\log_2(\log x)} = \log x - (\log x)^2 + 1$

$\Rightarrow \quad (2)^{2\log_2(\log x)} = \log x - (\log x)^2 + 1$

$\Rightarrow \quad 2^{\log_2(\log x)^2} = \log x - (\log x)^2 + 1$

$\Rightarrow \quad (\log x)^2 = \log x + 1 - (\log x)^2$

$\Rightarrow \quad 2(\log x)^2 - \log x - 1 = 0$

माना $\log x = y$

$\therefore \quad 2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{1+4\times 2}}{4}$

$$= \frac{1\pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \log x = 1 \Rightarrow x = e$

तथा $\log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-1/2}$

**16.** $2^{3/\log_3 x} = \frac{1}{64} \Rightarrow 2^{3/\log_3 x} = 2^{-6}$

$\therefore \quad \frac{3}{\log_3 x} = -6 \Rightarrow \log_3 x = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x = 3^{-1/2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**17.** चूँकि $\tan\left(\frac{P}{2}\right)$ और $\tan\left(\frac{Q}{2}\right)$ समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं।

$\therefore \quad \tan\frac{P}{2}+\tan\frac{Q}{2} = -\frac{b}{a}$

तथा $\quad \tan\frac{P}{2}.\tan\frac{Q}{2} = \frac{c}{a}$

साथ ही $\quad \frac{P}{2}+\frac{Q}{2}+\frac{R}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{P+Q}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{R}{2}$

$\Rightarrow \quad \frac{P+Q}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{P+Q}{2}\right) = \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad \frac{\tan\frac{P}{2}+\tan\frac{Q}{2}}{1-\tan\frac{P}{2}\tan\frac{Q}{2}} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{-b/a}{1-\frac{c}{a}} = 1$

$\Rightarrow \quad -b = a-c$

$\therefore \quad a+b = c$

**18.** $\because H, P$ और $Q$ के मध्य हरात्मक माध्य है।

$\therefore \quad H = \frac{2PQ}{P+Q} \Rightarrow \frac{H(P+Q)}{PQ} = 2 \Rightarrow \frac{H}{Q}+\frac{H}{P} = 2$

**19.** दिया है, $a-b = \sqrt{2}$ तथा $a+b = \sqrt{3}$

हल करने पर, $a = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ तथा $b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

अब, $4ab(a^2+b^2) = 4ab[(a-b)^2+2ab]$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left[(\sqrt{2})^2+2\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= (3-2)\left[2+\frac{(3-2)}{2}\right]$$

$$= 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

**20.** दी गई समीकरण निम्न है

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$= \dfrac{1 - \pm\sqrt{3}i}{2}$

$= \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$= \omega, \omega^2$

परन्तु $\alpha^{19} = \omega^{19} = \omega$

तथा $\beta^7 = (\omega^2)^7 = \omega^2$

अतः समीकरण जिसके मूल $\alpha^{19}, \beta^7$ हैं, $x^2 + x + 1 = 0$ है।

**21.** माना $2^x = 3^y = 12^z = k$

$\Rightarrow \quad 2 = k^{1/x}, 3 = k^{1/y}, 12 = k^{1/z}$

अब $\quad 12 = 2 \times 2 \times 3$

$\Rightarrow \quad k^{1/z} = k^{2/x} \times k^{1/y}$

$\Rightarrow \quad k^{\frac{1}{z}} = k^{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$

**22.** $\because \ (2x - 3y) + (3y - 4z) + (4z - 2x) = 0$

$\therefore \ (2x - 3y)^3 + (3y - 4z)^3 + (4z - 2x)^3$

$= 3(2x - 3y)(3y - 4z)(4z - 2x)$

$\left[\because \text{यदि } a + b + c = 0, \text{ तब } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc\right]$

$= (6x - 9y)(4z - 2x)(3y - 4z)$

**23.** चूँकि $x + k, x^2 + px + q$ तथा $x^2 + lx + m$ का म.स. है।

अतः $x = -k$ इन्हें सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore \ k^2 - kp + q = k^2 - lk + m \Rightarrow -kp + q = -lk + m$

$\Rightarrow \quad k(l - p) = m - q$

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{m-q}{l-p}$ या $\dfrac{q-m}{p-l}$

**24.** $\because \ x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \ldots \infty}}}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{12 + x} \Rightarrow x^2 = 12 + x$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 12 = 0$

$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$

$\therefore \quad x = 4, -3$

**25.** कुल लोग, $n(U) = 60, \ n(E) = 35, \ n(H) = 20$

$n(\overline{E} \cap \overline{H}) = 10 \Rightarrow n(\overline{E \cup H}) = 10$

$\Rightarrow \quad n(U) - n(E \cup H) = 10$

$\Rightarrow \quad n(E \cup H) = 60 - 10 = 50$

अब, $\quad n(E \cup H) = n(E) + n(H) - n(E \cap H)$

$\Rightarrow \quad 50 = 35 + 20 - n(E \cap H)$

$\Rightarrow \quad n(E \cap H) = 55 - 50 \Rightarrow n(E \cap H) = 5$

अतः दोनों भाषाओं को बोलने वाले लोगों की संख्या 5 है।

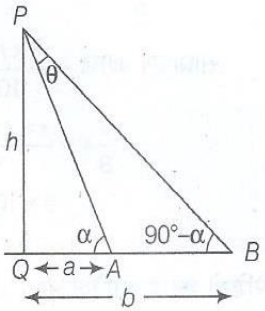
**26.** भुजाओं की संख्या = 13

$\therefore$ अन्तःकोणों का योगफल $= (13 - 2)\pi = 11\pi$

या $22 \times$ समकोण

**27.** माना $PQ = h$, एक मीनार है।

$\Delta PQA$ में, $\tan\alpha = \dfrac{h}{a}$

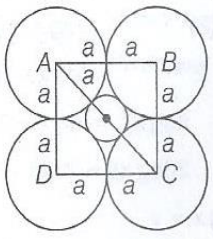



$\Delta PQB$ में, $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{h}{b} \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{h}{b}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{b}$ [समी (i) से]

$\Rightarrow \quad h^2 = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab}$

**28.** चारों वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने पर वर्ग $ABCD$ प्राप्त होता है जिसकी भुजा $2a$ है तथा विकर्ण $= \sqrt{2}(2a)$




$\therefore$ अन्तः वृत्त का व्यास

$= \sqrt{2}(2a) - 2a = 2a(\sqrt{2} - 1)$

$\therefore$ अभीष्ट त्रिज्या $= \dfrac{2a(\sqrt{2} - 1)}{2} = a(\sqrt{2} - 1)$

**29.** तालाब में भरे पानी का आयतन = 5 × 5 × 1 = 25 घन मी

∵ ईंटें पानी का 20% सोख लेती हैं।

∴ सोखा गया पानी = $25 \times \frac{20}{100} = 5$ घन मी

शेष पानी की मात्रा = 25 – 5 = 20 घन मी

∴ पानी की ऊँचाई = $\frac{20}{5 \times 5} = 0.8$ मी

**30.** प्रिज्म का आयतन = $1920\sqrt{3}$ घन सेमी

आधार का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (16)^2 = 64\sqrt{3}$ घन सेमी

∴ प्रिज्म की ऊँचाई = $\frac{\text{आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \frac{1920\sqrt{3}}{64\sqrt{3}}$

= 30 सेमी

**31.** माना अन्तः त्रिज्या = $r_1$ सेमी

बाह्य त्रिज्या = $r_2$ सेमी

तथा $h = 7$ सेमी

वक्रपृष्ठों का अन्तर = 44 वर्ग सेमी

$\Rightarrow \quad 2\pi(r_2 - r_1)h = 44$

$\Rightarrow \quad \frac{2 \times 22}{7}(r_2 - r_1) \times 7 = 44$

$\Rightarrow \quad r_2 - r_1 = 1 \quad \ldots(i)$

धातु का आयतन = 88 घन सेमी

$\Rightarrow \quad \pi(r_2^2 - r_1^2)h = 88$

$\Rightarrow \frac{22}{7}(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \times 7 = 88$

$\Rightarrow \quad r_2 + r_1 = \frac{88}{22} = 4 \quad \ldots(ii)$

समी (i) व (ii) को हल करने पर,

$r_2 = 2.5$ सेमी व $r_1 = 1.5$ सेमी

∴ व्यास $d_2 = 5$ सेमी व $d_1 = 3$ सेमी

∴ अभीष्ट अनुपात = 3:5

**32.** माना शंकु $x$ की त्रिज्या, ऊँचाई तथा आयतन क्रमशः $r_1$, $h_1$ तथा $V_1$ और शंकु $y$ की त्रिज्या, ऊँचाई तथा आयतन क्रमशः $r_2$, $h_2$ तथा $V_2$ हैं।

प्रश्नानुसार, $r_1 = 3r_2 \quad \ldots(i)$

तथा $V_2 = \frac{1}{3}V_1$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1\right)$

$\Rightarrow \quad r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}r_1^2 h_1$

$\Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{3r_2^2}{r_1^2} = \frac{3r_2^2}{(3r_2)^2}$ [समी (i) से]

$\Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{3r_2^2}{9r_2^2} = \frac{3}{9}$

अर्थात् $h_1 : h_2 = 1 : 3$

**33.** गोले के वक्रपृष्ठ में 21% की वृद्धि करने पर आयतन में भी 21% की वृद्धि होगी।

**34.** ∵ $(x + 2)$, $(x + 6)$ और $(3x + 10)$ का गुणोत्तर माध्य 8 है।

$\therefore [(x + 2)(x + 6)(3x + 10)]^{\frac{1}{3}} = 8$

$\Rightarrow (x + 2)(x + 6)(3x + 10) = (8)^3 = 512$

$\Rightarrow (x + 2)(x + 6)(3x + 10) = 4 \times 8 \times 16$

$= (2 + 2)(2 + 6)(3 \times 2 + 10)$

$\therefore \quad x = 2$

**35.** 100 छात्रों के औसत अंक = 45

कुल अंक = $45 \times 100 = 4500$

38 के स्थान पर 83 अंक लेने पर कुल अंक

= 4500 – 38 + 83 = 4545

∴ वास्तविक माध्य = $\frac{4545}{100} = 45.45$

**36.** $\frac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$

$= \frac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}$

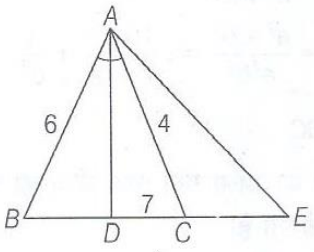
$= \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$= \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{12}}{3 - 2}$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

**37.** $D$ और $E$, $\angle A$ के आन्तरिक एवं बाह्य अर्द्धक हैं।




$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ तथा $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ तथा $\frac{BE}{CE}$

$\Rightarrow \quad BD = \frac{3}{2}BC$ तथा $CD = \frac{2}{3}BE$

अब $\quad DC = BC - BD = 7 - \frac{3}{2}DC$

$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{3}{2}\right)DC = 7$

$\Rightarrow \quad DC = \frac{14}{5} = 2.8$

तथा $\quad CE = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}(BC + CE)$

$\Rightarrow \quad \left(1-\frac{1}{3}\right)CE = \frac{2}{3}BC$

$\Rightarrow \quad CE = \frac{2}{3} \times 7 \times 3 \Rightarrow CE = 14$

$\therefore \quad DE = DC + CE$

$= 14 + 2.8 = 16.8$ सेमी

**38.** हम जानते हैं कि $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\because \quad \angle B = 60°$

$\therefore \quad \cos 60° = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\Rightarrow \quad ac = a^2 + c^2 - b^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = a^2 + c^2 - ac$

**39.** $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times a \times b$

तथा $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times c \times p$

$\therefore \quad ab = cp \Rightarrow p = \frac{ab}{c}$

$\Rightarrow \quad p^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$

$\Rightarrow \quad p^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \qquad [\because c^2 = a^2 + b^2]$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

**40.** दिया है, $AB = 2BC$

मूलबिन्दु से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को दो बराबर भागों में बाँटता है।

$BE = CE = \frac{BC}{2}$ तथा $BF = AF$

$BF = \frac{AB}{2} = \frac{2BC}{2} = BC$

अब $\Delta OFB$ में,

$r^2 = a^2 + BE^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = a^2 + BC^2 \qquad ...(i)$

तथा $\Delta OEB$ में,

$r^2 = b^2 + BE^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = b^2 + \frac{BC^2}{4} \qquad \left[\because BE = \frac{BC}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad 4r^2 = 4b^2 + BC^2 \qquad ...(ii)$

समी (i) व (ii) को हल करने पर, $-3r^2 = a^2 - 4b^2$

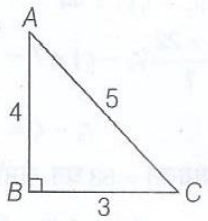
$\therefore \quad a^2 + 3r^2 = 4b^2$

**41.** हम जानते हैं कि किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण उसी चाप द्वारा परिधि के किसी बिन्दु पर बनाए गए कोण का दोगुना होता है।

$\therefore \quad \angle PQR = \frac{60°}{2} = 30°$

**42.** दिया है, $\angle B = 90°$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 3$ सेमी

$\therefore \quad AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ सेमी



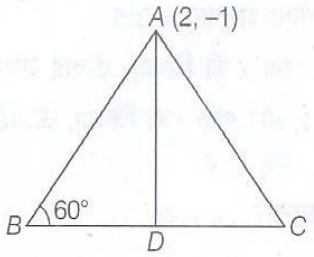

$s = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$

$\Delta = \sqrt{4(6-5)(6-4)(6-3)}$

$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6$

$\therefore$ अन्तः वृत्त की त्रिज्या $= \frac{\Delta}{s} = \frac{6}{6} = 1$ सेमी

**43.** त्रिभुज समबाहु है।




$\therefore \quad \angle B = 60°$

आधार $BC$ की समीकरण निम्न है

$x + y - 4 = 0$

$A(2, -1)$ से आधार $BC$ की लम्बवत् दूरी

$$AD = \left|\frac{2 - 1 - 4}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

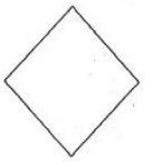
$\Delta ABD$ में, $\tan 60° = \frac{AD}{BD}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{2}BD} \Rightarrow BD = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \text{ भुजा } BC = 2 \times BD = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$$

[$\because AD$, भुजा $BC$ को द्विभाजित करता है]

**44.** प्रवाह संचित्र में निर्णय संक्रिया का प्रतीक निम्न है



**45.** दिया है, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C \cos C$

$= 2\sin(\pi - C)\cos(A - B) + 2\sin C \cos[\pi - (A + B)]$

$= 2\sin C \cos(A - B) - 2\sin C \cos(A + B)$

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= 2\sin C\{2\sin A \sin B\} = 4\sin A \sin B \sin C$

**46.** दिया है, $A + B = \frac{\pi}{3}$ तथा $\cos A + \cos B = 1$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{A + B}{2}\right)\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{A - B}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\left(\frac{A - B}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \sin^2\left(\frac{A - B}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \cos(A - B) = \frac{1}{3}$$

**47.** $\left(\cot\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2}\right)^2 (1 - 2\tan\theta \cot 2\theta)$

$$= \left(\cot^2\frac{\theta}{2} + \tan^2\frac{\theta}{2} - 2\tan\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1 - 2\tan\theta}{\tan 2\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} + \tan^2\frac{\theta}{2} - 2\right)\left[1 - \frac{2\tan\theta}{2\tan\theta}(1 - \tan^2\theta)\right]$$

$$= \left(\frac{1 + \tan^4\frac{\theta}{2} - 2\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)(1 - 1 + \tan^2\theta)$$

$$= \left[\frac{\left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\right]\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 4$$

**48.** हम जानते हैं कि यदि दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ $r_1$ व $r_2$ हैं परस्पर लम्बवत् प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $\frac{2r_1r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ होगी।

**49.** दी गई रेखाएँ निम्न हैं

$$x + 3y = 4 \quad \ldots(i)$$

तथा $\quad 6x - 2y = 7$

$$\Rightarrow \quad 3x - y = \frac{7}{2} \quad \ldots(ii)$$

दी गई रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

$\therefore$ $PQRS$ आयत होगा।

**50.** दी गई समीकरण निम्न हैं $x + y = 2$

तथा $\quad xy - z^2 = 1$

केवल विकल्प (a) उपरोक्त समीकरणों को सन्तुष्ट करता है।

$$\therefore \quad x = 1, y = 1, z = 0$$

## भौतिकी एवं रसायन

**51.** चूँकि $u = 0, a = +g$

$$\therefore \quad h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$

**52.** किसी ईंधन का ऊष्मीय मान, ऊष्मा की वह मात्रा है, जो उस ईंधन के 1 ग्राम को जलाने पर उत्पन्न होती है। गैसों का ऊष्मीय मान, ठोसों के ऊष्मीय मान की अपेक्षा अधिक होता है तथा हाइड्रोजन का ऊष्मीय मान अधिकतम होता है। अत: ऊष्मीय मान के बढ़ते क्रम में सही व्यवस्था निम्न है।

लकड़ी < चारकोल < बायोगैस < हाइड्रोजन

**53.** लिग्नाइट का रंग भूरा-काला होने के कारण इसे भूरा कोयला भी कहा जाता है। इसमें कार्बन की मात्रा लगभग 25-28% तथा नमी की मात्रा लगभग 66% तक होती है।

**54.** तृतीय वर्ग के उत्तोलकों में यान्त्रिक लाभ 1 से कम होता है।

**55.** प्रथम बूँद को फर्श पर टकराने में लगा समय

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 1.8}{10}} = 0.6 \text{ सेकण्ड}$$

चूँकि पानी की बूँदें समान अन्तराल पर गिर रही हैं। अत: दोनों बूँदों के बीच समयान्तराल = 0.2 सेकण्ड

इस समय में दूसरी बूँद की नॉजल से दूरी

$$= \frac{1}{2} g (0.4)^2 = 0.8 \text{ मी}$$

इसकी फर्श से दूरी = 1.8 – 0.8 = 1 मी = 100 सेमी

**56.** शुष्क हाइड्रोजन का दाब = वायुमण्डलीय दाब – जलीय तनाव

= (754 – 14) मिमी = 740 मिमी

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

(हाइड्रोजन के लिए) (मानक अवस्था में)

$$\Rightarrow \quad \frac{740 \times 600}{300} = \frac{760 \times V_0}{273}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{740 \times 600 \times 273}{300 \times 760}$$

$$= 531.63 \text{ सेमी}^3$$

∵ STP पर, 531.63 सेमी$^3$ हाइड्रोजन उत्पन्न होती है

= 1.8 ग्राम धातु द्वारा

∴ STP पर, 11200 सेमी$^3$ हाइड्रोजन उत्पन्न होगी

$$= \frac{1.8 \times 11200}{531.63}$$

= 37.9 ग्राम धातु द्वारा

अत: धातु का तुल्यांकी भार 37.9 है।

**57.** अणुओं की संख्या $= \frac{\text{ग्राम में भार}}{\text{अणुभार}} \times N_A$

∴ 9 ग्राम $H_2O$ में अणुओं की संख्या $= \frac{9}{18} \times N_A = \frac{N_A}{2}$

इसी प्रकार, 11 ग्राम $CO_2$ में अणुओं की संख्या

$$= \frac{11}{44} \times N_A$$

$$= \frac{N_A}{4}$$

$$\frac{\text{9 ग्राम } H_2O \text{ में अणुओं की संख्या}}{\text{11 ग्राम } CO_2 \text{ में अणुओं की संख्या}} = \frac{N_A \times 4}{2 \times N_A} = \frac{2}{1}$$

**58.** दाब $= \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{F}{A}$

अब, $F' = 4F$

$$A' = \frac{A}{2}$$

$$p' = \frac{F'}{A'} = \frac{4F}{A/2}$$

$$p' = 8p$$

**59.** कार्बन परमाणु का इलेक्ट्रॉनिक विन्यास निम्न है

$C_6 = 1s^1, 2s^2, 2p^2$

उत्तेजित अवस्था में, $C_6 = 1s^2, 2s^1, 2p_x^1, 2p_y^1, 2p_z^1$

अत: कार्बनिक यौगिकों में कार्बन की संयोजकता +4 है।

**60.** यथार्थ सेण्टीग्रेड पाठ्यांक = 60° C

अब, $\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$

$$\frac{60}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

$$F = 140°F$$

अत: यथार्थ फारेनहाइट पाठ्यांक = 140°F

फारेनहाइट थर्मामीटर के पाठ्यांक में त्रुटि

= 141° F – 140°F = 1°F

**61.** आयन का तुल्यांकी भार $= \frac{\text{आयन का अणुभार}}{\text{आयन पर आवेश}}$

अत: कार्बोनेट आयन ($CO_3^{2-}$) का अणुभार

= 12 + 48 = 60

$$\Rightarrow \quad CO_3^{2-} \text{ का तुल्यांकी भार} = \frac{60}{2} = 30$$

**62.** द्विध्रुव पर लगने वाला बल आघूर्ण = $MB\sin\theta$

**63.** तार के सन्तुलन के लिए, $F = mg$

$\Rightarrow \quad BIL = mg$

$$B = \frac{mg}{IL}$$

$$= \frac{4\times10^{-3}\times20\times10^{-2}\times10}{10\times20\times10^{-2}}$$

$= 4\times10^{-3}$ वेबर/मी$^2$

**64.** विसरण की दर, $r \propto \frac{1}{\sqrt{\text{अणुभार}(M)}}$

$$\frac{r_{H_2}}{r_X} = \sqrt{\frac{M_X}{M_{H_2}}} \Rightarrow 4 = \sqrt{\frac{M_X}{2}}$$

$\therefore \quad M_X = 16\times2 = 32$

**65.** गर्म करने पर, $CaCO_3$ निम्न प्रकार विघटित होता है

$$\underset{100\text{ ग्राम}}{CaCO_3} \xrightarrow{\Delta} \underset{52\text{ ग्राम}}{CaO} + CO_2$$

∵ 100 ग्राम $CaCO_3$ को गर्म करने पर CaO उत्पन्न होता है = 52 ग्राम

∴ 200 ग्राम $CaCO_3$ को गर्म करने पर CaO उत्पन्न होगा

$$= \frac{52\times200}{100} = 104 \text{ ग्राम}$$

$$\underset{56\text{ ग्राम}}{CaO} + \underset{18\text{ ग्राम}}{H_2O} \longrightarrow Ca(OH)_2$$

∵ 56 ग्राम CaO अभिक्रिया करता है = 18 ग्राम $H_2O$ से

∴ 104 ग्राम CaO अभिक्रिया करेगा $= \frac{18\times104}{56}$

$= 36$ ग्राम $H_2O$ से

**66.** $v^2 = u^2 + 2gh = 0 + 2\times10\times100 = 2000$ मी/से

रेत में 2 सेमी धसने के पश्चात्, $v = 0$

तथा $u = \sqrt{200}$ मी/से

पुनः समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$ से, $0 = 2000 - 2\times a\times2$

$\therefore \quad a = 500$ मी/से$^2$

$\therefore \quad v = u + at$

$0 = 20\sqrt{5} - 500t$

$\therefore \quad t = \frac{20\sqrt{5}}{500} = 0.04\sqrt{5}$ सेकण्ड

**67.** द्रव अथवा गैस में निलम्बित सूक्ष्म कणों का अनियमित गमन जोकि उनके, परिक्षेपण माध्यम के कणों के साथ संघट्ट के कारण होता है, ब्राऊनी गति कहलाता है।

**68.** प्रतिरोध, $R_1 = \frac{\rho l_1}{A_1}$ तथा $R_2 = \frac{\rho l_2}{A_2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}\times\frac{A_2}{A_1} = \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

दिया है, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{1}$ तथा $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ ऊष्माओं का अनुपात, } \frac{H_1}{H_2} = \frac{V^2/R_1}{V^2/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{4}{1}$$

**69.** प्रथम परिनालिका की प्रति एकांक लम्बाई में फेरों की संख्या

$$n_1 = \frac{n}{l}$$

$$\therefore \quad B_1 = \mu_0 n_1 l = \frac{\mu_0 nl}{l}$$

द्वितीय परिनालिका की प्रति एकांक लम्बाई में फेरों की संख्या

$$n_2 = \frac{n}{l/2}$$

$$\therefore \quad B_2 = \mu_0 n_2 l = \frac{\mu_0 nl}{l/2} = \frac{2\mu_0 nl}{l} = 2B_1$$

या $\quad \frac{B_2}{B_1} = 2:1$

**70.** ओजोन का सूत्र $O_3$ तथा ऑक्सीजन का $O_2$ है तथा वे अणु, जिनमें समान परमाणु उपस्थित होता है परन्तु समान परमाणुओं की संख्या भिन्न-भिन्न होती है, अपररूप कहलाते हैं। अतः $O_3$ तथा $O_2$ में भी O परमाणुओं की संख्या भिन्न होने के कारण एक-दूसरे के अपररूप हैं।

**71.** शेष पदार्थ का अंश, $\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

∴ शेष बचे पदार्थ का प्रतिशत अंश

$$= \frac{N}{N_0}\times100 = \frac{1}{8}\times100 = 12.5\%$$

**72.** दिया है, $Q = 84\%$ गतिज ऊर्जा $= \frac{84}{100}\times\frac{1}{2}\times mv^2$

यहाँ, $\quad Q = mc\Delta Q = m\times0.03\times4200\times100$

$$\therefore \quad m\times0.03\times4200\times100 = \frac{84}{100}\times\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \quad v = 173.2 \text{ मी/से}$$

$= 1.732\times10^4$ सेमी/से

**74.** धातु की प्रतिशतता $= \frac{\text{यौगिक में धातु का अणुभार}}{\text{यौगिक का अणुभार}} \times 100$

$= \frac{24}{(24+16)} \times 100 = \frac{2400}{40} = 60\%$

**75.** $m = \frac{I}{O} = \frac{v}{u}$

$\Rightarrow \frac{2O}{O} = \frac{v}{u}$

$\Rightarrow \quad v = 2u = 2 \times 15 = 30$ सेमी

**76.** पी.वी.सी. का पूरा नाम पॉली विनाइल क्लोराइड है। यह विनाइल क्लोराइड का बहुलक है तथा इसका प्रयोग कुचालक के रूप में किया जाता है।

**77.** $CH_3OH$ में केवल एक कार्बन परमाणु उपस्थित है। अतः इसके पितृ ऐल्केन का नाम मेथेन है। चूँकि इसमें ऐल्कोहॉल समूह (–OH समूह) भी उपस्थित है। अतः पितृ ऐल्केन के नाम के अन्त में 'ऑल' अनुलग्न लगा देते हैं। अतः $CH_3OH$ का आई.यू.पी.ए.सी. नाम 'मेथेनॉल' है।

**78.** जल को जब 10°C से 0°C तक ठण्डा किया जाता है, तब 10°C से 4°C तक जल का आयतन पहले घटता है तथा 4°C से 0°C तक बढ़ता है।

**79.** $\underset{100\text{ ग्राम}}{CaCO_3} + \underset{(2\times63)\text{ ग्राम}}{2HNO_3} \longrightarrow Ca(NO_3)_2 + H_2CO_3$

∵ 100 ग्राम $CaCO_3$ उदासीन होता है।

$= (2 \times 63)$ ग्राम $HNO_3$ द्वारा

∴ 10 ग्राम $CaCO_3$ उदासीन होगा

$= \frac{2 \times 63 \times 10}{100}$ ग्राम $HNO_3$ द्वारा

$= 12.6$ ग्राम $HNO_3$ द्वारा

परन्तु दिए गए नाइट्रिक अम्ल में केवल 20% अम्ल है।

अतः 10 ग्राम $CaCO_3$ को उदासीन करने के लिए प्रयुक्त $HNO_3$ की मात्रा $= \frac{12.6 \times 20}{100} = 63$ ग्राम

**81.** दिया है, इलेक्ट्रॉनिक विन्यास $= 1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^5$

चूँकि दिए गए तत्व के अन्तिम कक्षक (संयोजकता कक्ष) में $(5 + 2 = 7)$ इलेक्ट्रॉन उपस्थित हैं। अतः यह 17वें (अर्थात् VIIA) समूह का सदस्य है। इस समूह के सदस्यों को सामान्यतः हैलोजन कहा जाता है।

**82.** सरल लोलक की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m\omega^2(a^2 - y^2)$

यहाँ, विस्थापन $(y)$ = आयाम $(a)$

∴ गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m\omega^2(a^2 - a^2) = 0$

**83.** एक इलेक्ट्रॉन तथा एक प्रोटॉन को समीप लाने पर निकाय का स्थायित्व बढ़ेगा; अतः स्थितिज ऊर्जा घट जाएगी।

**84.** शोरा, पोटैशियम नाइट्रेट का साधारण नाम है जिसका प्रयोग माचिस (दियासलाई) उद्योग में ऑक्सीकारक के रूप में किया जाता है।

**85.** आवर्त सारणी के किसी आवर्त में बाईं से दाईं ओर चलने पर धात्विक लक्षण घटता है तथा अधात्विक लक्षण बढ़ता है। चूँकि दिए गए तत्व आवर्त सारणी के समान आवर्त में निम्न क्रम में उपस्थित हैं।

Si, P, S, Cl

अतः Cl सर्वाधिक अधात्विक प्रकृति का तत्व है।

**86.** पीतल का घनत्व $= \frac{80 \times 8.9 + 20 \times 7.1}{80 + 20}$

$= \frac{712 + 142}{100} = \frac{854}{100} = 8.5$ ग्राम/सेमी$^3$

**88.** दी गई तरंगों में रेडियो तरंगों की आवृत्ति सबसे कम है।

**89.** लॉरिल ऐल्कोहॉल एक संतृप्त ऐल्कोहॉल है तथा संतृप्त ऐल्कोहॉलों का सामान्य सूत्र $C_nH_{2n+1}OH$ होता है। अतः लॉरिल ऐल्कोहॉल का सूत्र $C_{12}H_{25}OH$ है।

**90.** धातुओं में, धातु परमाणु, मुक्त रूप से गति करते हुए इलेक्ट्रॉनों के समूहों में धँसे रहते हैं। ये मुक्त इलेक्ट्रॉन ही धातुओं को चमक प्रदान करते हैं।

**91.** $W = J \times H$ तथा इंजन की दक्षता $\eta = \frac{W}{J \times H}$

**92.** माना $C_{12}H_{22}O_{11}$ में C की ऑक्सीकरण संख्या $x$ है।

$C_{12}H_{22}O_{11}$

$(12 \times x) + (1 \times 22) + 11 \times (-2) = 0$

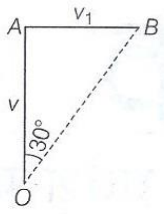
$12x + 22 - 22 = 0$

$12x = 0$

∴ $x = 0$

अतः $C_{12}H_{22}O_{11}$ में C की ऑक्सीकरण संख्या शून्य है।

**93.** माना विमान का वेग $v_1$ है तथा व्यक्ति को अपने सिर के ऊपर विमान को देखने के $t$ समय बाद ध्वनि सुनाई देती है।




चित्रानुसार, $\tan 30° = \frac{AB}{AO} \Rightarrow AB = \frac{AO}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad v_1 = v/\sqrt{3}$

**94.** C परमाणु में इलेक्ट्रॉनों की संख्या = 6

O परमाणु में इलेक्ट्रॉनों की संख्या = 8

$\therefore CO_2$ में परमाणुओं की कुल संख्या = $6 + (2 \times 8)$

$= 22$

**95.** $v \propto \sqrt{T}$

$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{273 + t_1}{273 + t_2}}$

या $\quad \frac{v_0}{v_2} = \sqrt{\frac{273}{T_2}}$

दिया है, $v_2 = \frac{3}{2} v_0$

$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{273}{T_2}}$

$\Rightarrow \quad T_2 = 614.25 \text{ K}$

$= 341.25° \text{ C}$

**96.** अपवर्तनांक, $\mu = \frac{\text{वास्तविक गहराई}}{\text{आभासी गहराई}} \Rightarrow 1.33 = \frac{40}{x}$

$\Rightarrow \quad x \simeq 30$ सेमी

**97.** पिटवाँ लोहे में कार्बन की मात्रा बहुत कम होती है। अत: यह लोहे का शुद्धतम रूप है।

**98.** क्रोमियम का मूल अवस्था में इलेक्ट्रॉनिक विन्यास,

$= 2, 8, 13, 1$

$= 1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 3d^5, 4s^1$

अर्द्धपूर्ण कक्षक

ऐसा अर्द्धपूर्ण कक्षकों के अधिक स्थायित्व के कारण होता है।

**100.** $q = ne$

$\therefore \quad n = \frac{q}{e} = \frac{it}{e} = \frac{1 \times 1}{1.6 \times 10^{-19}}$

$= 6.25 \times 10^{18}$