

## निर्देशांक ज्यामिति

### (A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

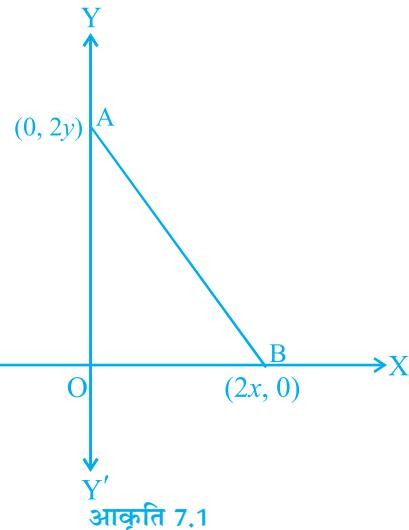
दूरी सूत्र, विभाजन सूत्र, त्रिभुज का क्षेत्रफल

- दो बिंदुओं  $P(x_1, y_1)$  और  $Q(x_2, y_2)$  के बीच की दूरी  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  होती है।
  - किसी बिंदु  $P(x, y)$  की मूलबिंदु से दूरी  $\sqrt{x^2 + y^2}$  होती है।
  - उस बिंदु  $P$  के निर्देशांक, जो बिंदुओं  $A(x_1, y_1)$  और  $B(x_2, y_2)$  को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से  $m_1 : m_2$  के अनुपात में विभाजित करता है,
- $$\left( \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right) \text{ होते हैं।}$$
- बिंदुओं  $P(x_1, y_1)$  और  $Q(x_2, y_2)$  को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक  $\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$  होते हैं।
  - शीर्षों  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  और  $C(x_3, y_3)$  वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

होता है, जिसका शून्येतर मान होता है, जब तक कि  $A, B$  और  $C$  सरेख न हों। यह मान सदैव धनात्मक ही लिया जाता है।





17. एक रेखा  $y$ -अक्ष और  $x$ -अक्ष को क्रमशः बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। यदि,  $(2, -5)$  रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है, तो P और Q के निर्देशांक क्रमशः हैं
- (A)  $(0, -5)$  और  $(2, 0)$       (B)  $(0, 10)$  और  $(-4, 0)$   
 (C)  $(0, 4)$  और  $(-10, 0)$       (D)  $(0, -10)$  और  $(4, 0)$
18. शीर्षों  $(a, b+c), (b, c+a)$  और  $(c, a+b)$  वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है
- (A)  $(a+b+c)^2$     (B) 0    (C)  $a+b+c$     (D)  $abc$
19. यदि बिंदुओं  $(4, p)$  और  $(1, 0)$  के बीच की दूरी 5 है, तो p का मान है
- (A) केवल 4      (B)  $\pm 4$       (C) केवल  $-4$       (D) 0
20. यदि बिंदु A  $(1, 2)$ , O  $(0, 0)$  और C  $(a, b)$  सरेख हैं, तो
- (A)  $a = b$       (B)  $a = 2b$       (C)  $2a = b$       (D)  $a = -b$

### (C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

**प्रतिवर्द्ध प्रश्न 1:** बिंदु A  $(-1, 0)$ , B  $(3, 1)$ , C  $(2, 2)$  और D  $(-2, 1)$  एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

**हल :** सत्य। दोनों विकर्णों AC और BD के मध्य-बिंदु  $\frac{1}{2}, 1$  हैं, अर्थात् विकर्ण परस्पर समद्विभाजित कर रहे हैं।

**प्रतिवर्द्ध प्रश्न 2:** बिंदु  $(4, 5), (7, 6)$  तथा  $(6, 3)$  सरेख हैं।

**हल :** असत्य। क्योंकि इन बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है, अतः बिंदु सरेख नहीं हैं।

**प्रतिवर्द्ध प्रश्न 3:** बिंदु P  $(0, -7)$ , बिंदुओं A  $(-1, 0)$  और B  $(7, -6)$  को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक और  $y$ -अक्ष का प्रतिच्छेद बिंदु है।

**हल :** सत्य। P  $(0, -7)$  स्पष्टतः  $y$ -अक्ष पर स्थित है। साथ ही, यह दोनों बिंदुओं  $(-1, 0)$  और  $(7, -6)$  से  $\sqrt{50}$  इकाई की दूरी पर है।

### प्रश्नावली 7.2

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों का औचित्य दीजिए।

- शीर्षों A  $(-2, 0)$ , B  $(2, 0)$  और C  $(0, 2)$  वाला त्रिभुज ABC शीर्षों D  $(-4, 0)$ , E  $(4, 0)$  और F  $(0, 4)$  वाले त्रिभुज DEF के समरूप है।
- बिंदु P  $(-4, 2)$ , बिंदुओं A  $(-4, 6)$  और B  $(-4, -6)$  को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित है।

3. बिंदु  $(0, 5)$ ,  $(0, -9)$  और  $(3, 6)$  सरेख हैं।
4. बिंदु  $P(0, 2)$ , बिंदुओं  $A(-1, 1)$  और  $B(3, 3)$  को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक और  $y$ -अक्ष का प्रतिच्छेद बिंदु है।
5. बिंदु  $A(3, 1)$ ,  $B(12, -2)$  और  $C(0, 2)$  एक त्रिभुज के शीर्ष नहीं हो सकते।
6. बिंदु  $A(4, 3)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(5, -6)$  और  $D(-3, 5)$  एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
7. एक वृत्त का केंद्र मूलबिंदु पर है तथा एक बिंदु  $P(5, 0)$  इस वृत्त पर स्थित है। बिंदु  $Q(6, 8)$  इस वृत्त के बाहर स्थित है।
8. बिंदु  $A(2, 7)$ , बिंदुओं  $P(6, 5)$  और  $Q(0, -4)$  को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।
9. बिंदु  $P(5, -3)$ , बिंदुओं  $A(7, -2)$  और  $B(1, -5)$  को मिलाने वाले रेखाखंड को समत्रिभाजित करने वाले दो बिंदुओं में से एक बिंदु है।
10. बिंदु  $A(-6, 10)$ ,  $B(-4, 6)$  और  $C(3, -8)$  इस प्रकार सरेख हैं कि  $AB = \frac{2}{9}AC$  है।
11. बिंदु  $P(-2, 4)$ , त्रिज्या 6 और केंद्र  $C(3, 5)$  वाले वृत्त पर स्थित है।
12. बिंदु  $A(-1, -2)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(2, 5)$  और  $D(-3, 0)$  इसी क्रम में, एक आयत बनाते हैं।

#### (D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

**प्रतिदर्श प्रश्न 1:** यदि बिंदुओं  $A(3, 4)$  और  $B(k, 6)$  को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु  $P(x, y)$  है तथा  $x + y - 10 = 0$  है, तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल :** बिंदुओं  $A(3, 4)$  और  $B(k, 6)$  को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु

$$= \frac{3+k}{2}, \frac{4+6}{2} = \frac{3+k}{2}, 5$$

तब,  $\frac{3+k}{2}, 5 = (x, y)$

अतः,  $\frac{3+k}{2} = x$  और  $5 = y$

क्योंकि  $x + y - 10 = 0$  है, इसलिए हमें प्राप्त है:

$$\frac{3+k}{2} + 5 - 10 = 0$$

अर्थात्  $3 + k = 10$

अतः,  $k = 7$  है।

**प्रतिदर्श प्रश्न 2:** शीर्ष A (1, -4) वाले उस त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी A से होकर जाने वाली भुजाओं के मध्य-बिंदु (2, -1) और (0, -1) हैं।

**हल :** मान लीजिए कि B और C के निर्देशांक क्रमशः (a, b) और (x, y) हैं।

$$\text{तब } \left( \frac{1+a}{2}, \frac{-4+b}{2} \right) = (2, -1)$$

$$\begin{aligned} \text{अतः, } 1 + a &= 4, \quad -4 + b = -2 \\ a &= 3 \quad \quad \quad b = 2 \end{aligned}$$

$$\text{साथ ही, } \left( \frac{1+x}{2}, \frac{-4+y}{2} \right) = (0, -1)$$

$$\text{अतः, } 1 + x = 0, \quad -4 + y = -2$$

$$\text{या } x = -1 \quad \text{अर्थात् } y = 2$$

अतः, Δ ABC के शीर्षों के निर्देशांक A (1, -4), B (3, 2) और C (-1, 2) हैं।

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, } \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} [1(2-2) + 3(2+4) - 1(-4-2)] \\ &= \frac{1}{2} [18 + 6] \\ &= 12 \text{ वर्ग इकाई} \end{aligned}$$

**प्रतिदर्श प्रश्न 3:** बिंदुओं P ( $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ ), Q ( $-\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ ) और R ( $-\sqrt{6}, \sqrt{6}$ ) द्वारा बनने वाला त्रिभुज PQR किस प्रकार का है?

**हल :** दूरी सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$PQ = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$$

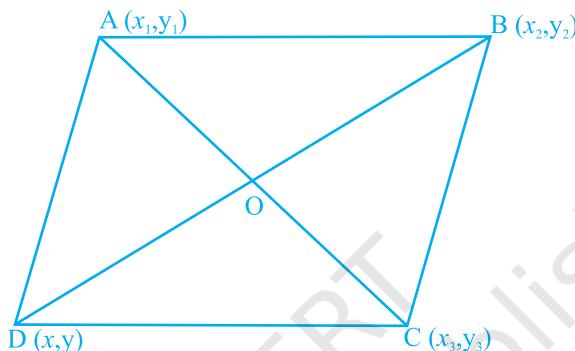
$$PR = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2} = \sqrt{2 + 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 6 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$$

$$RQ = \sqrt{(-\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2} - \sqrt{6})^2} = \sqrt{2 + 6 - 2\sqrt{12} + 2 + 6 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$$

क्योंकि  $PQ = PR = RQ = 4$  है, इसलिए बिंदु P, Q और R एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

**प्रतिदर्श प्रश्न 4:** ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसके तीन शीर्ष A ( $x_1, y_1$ ), B ( $x_2, y_2$ ) और C ( $x_3, y_3$ ) हैं। इस समांतर चतुर्भुज के चौथे शीर्ष D के निर्देशांक  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  और  $y_3$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

**हल :** मान लीजिए कि D के निर्देशांक  $(x, y)$  हैं। हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 7.2

अतः, AC का मध्य-बिंदु = BD का मध्य बिंदु

$$\text{अर्थात्, } \frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{x_2 + x}{2}, \frac{y_2 + y}{2}$$

अर्थात्,  $x_1 + x_3 = x_2 + x$  और  $y_1 + y_3 = y_2 + y$

अर्थात्,  $x_1 + x_3 - x_2 = x$  और  $y_1 + y_3 - y_2 = y$

इस प्रकार, D के निर्देशांक  $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$  हैं।

### प्रश्नावली 7.3

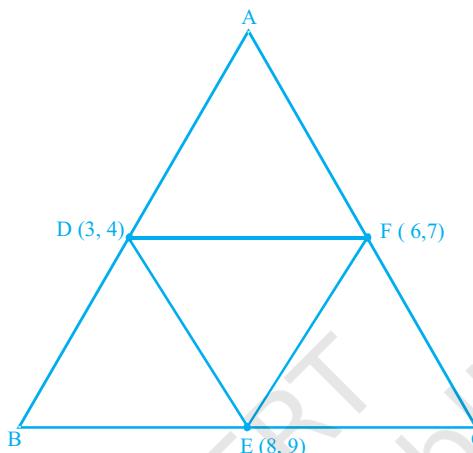
- बिंदुओं A (-5, 6), B (-4, -2) और C (7, 5) से बनने वाले त्रिभुज का प्रकार बताइए।
- $x$ -अक्ष पर स्थित ऐसे बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदु (7, -4) से  $2\sqrt{5}$  की दूरी पर हैं। ऐसे कितने बिंदु हैं?
- बिंदुओं A (2, -2), B (7, 3), C (11, -1) और D (6, -6) को इसी क्रम में लेने पर किस प्रकार का चतुर्भुज बनता है?
- $a$  का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदुओं A (-3, -14) और B ( $a$ , -5) के बीच की दूरी 9 इकाई है।
- एक बिंदु ज्ञात कीजिए, जो A (-5, 4) और B (-1, 6) से समदूरस्थ हो। ऐसे कितने बिंदु हैं?

6.  $x$ -अक्ष पर स्थित बिंदु Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं A(-5, -2) और B(4, -2) के लंब समद्विभाजक पर भी स्थित है। बिंदुओं Q, A और B से बनने वाले त्रिभुज का प्रकार भी बताइए।
7.  $m$  का मान ज्ञात कीजिए, यदि  $(5, 1), (-2, -3)$  और  $(8, 2m)$  सरेख हैं।
8. यदि बिंदु A(2, -4), बिंदुओं P(3, 8) और Q(-10,  $y$ ) से समदूरस्थ हैं, तो  $y$  के मान ज्ञात कीजिए। दूरी PQ भी ज्ञात कीजिए।
9. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष  $(-8, 4), (-6, 6)$  और  $(-3, 9)$  हैं।
10. बिंदुओं  $(-4, -6)$  और  $(-1, 7)$  को मिलाने वाले रेखाखंड को  $x$ -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है? विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
11. ज्ञात कीजिए कि बिंदु  $P\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right)$ , बिंदुओं A  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  और B(2, -5) को मिलाने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है।
12. यदि  $P(9a - 2, -b)$ , बिंदुओं A  $(3a + 1, -3)$  और B  $(8a, 5)$  को मिलाने वाले रेखाखंड को  $3 : 1$  के अनुपात में विभाजित करे, तो  $a$  और  $b$  के मान ज्ञात कीजिए।
13. यदि  $(a, b)$ , बिंदुओं A  $(10, -6)$  और B  $(k, 4)$  को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु है तथा  $a - 2b = 18$  है, तो  $k$  का मान और दूरी AB ज्ञात कीजिए।
14. किसी वृत्त का केन्द्र  $(2a, a - 7)$  है। यदि वृत्त, बिंदु (11, -9) से होकर जाता है और उसका व्यास  $10\sqrt{2}$  इकाई है, तो  $a$  के मान ज्ञात कीजिए।
15. बिंदुओं A(3, 2) और B(5, 1) को मिलाने वाला रेखाखंड बिंदु P पर 1:2 के अनुपात में विभाजित हो जाता है। तथा बिंदु P रेखा  $3x - 18y + k = 0$  पर स्थित है।  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।
16. यदि बिंदु D $\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ , E  $(7, 3)$  और F $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$  एक त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं, तो  $\triangle ABC$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
17. बिंदु A(2, 9), B( $a$ , 5) और C(5, 5) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, जिसका  $\angle B$  समकोण है।  $a$  के मान ज्ञात कीजिए और फिर  $\triangle ABC$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
18. बिंदुओं P(-1, 3) और Q(2, 5) को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, ताकि  $PR = \frac{3}{5}PQ$  हो।
19.  $k$  के मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु A( $k + 1, 2k$ ), B( $3k, 2k + 3$ ) और C( $5k - 1, 5k$ ) सरेख हैं।
20. वह अनुपात ज्ञात कीजिए, जिसमें रेखा  $2x + 3y - 5 = 0$ , बिंदुओं (8, -9) और (2, 1) को मिलाने वाले रेखाखंड को विभाजित करती है। विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

### (E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

**प्रतिवर्द्ध प्रश्न 1:**  $\triangle ABC$  की भुजाओं के मध्य-बिंदु D, E और F क्रमशः (3, 4), (8, 9) और (6, 7) हैं। इस त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

**हल :** क्योंकि D और F क्रमशः AB और AC के मध्य-बिंदु हैं, इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय द्वारा हम सिद्ध कर सकते हैं कि DFEB एक समांतर चतुर्भुज है। मान लीजिए कि B के निर्देशांक  $(x, y)$  हैं।



आकृति 7.3

अनुच्छेद (D) के प्रतिदर्श प्रश्न 4 को देख कर, प्राप्त कीजिए :

$$x = 3 + 8 - 6 = 5$$

$$y = 4 + 9 - 7 = 6$$

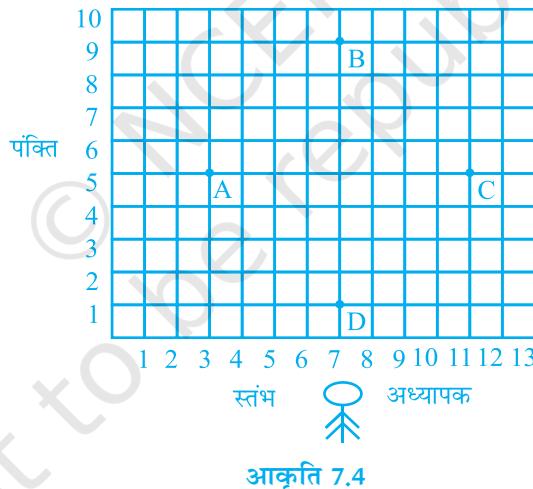
अतः, B (5, 6) त्रिभुज के शीर्षों में से एक शीर्ष है।

इसी प्रकार, DFCE और DAFE भी समांतर चतुर्भुज हैं तथा A के निर्देशांक  $(3 + 6 - 8, 4 + 7 - 9) = (1, 2)$  हैं। C के निर्देशांक  $(8+6-3, 9+7-4) = (11, 12)$  हैं। इस प्रकार, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक A (1, 2), B (5, 6) और C (11, 12) हैं।

#### प्रश्नावली 7.4

- यदि  $(-4, 3)$  और  $(4, 3)$  एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के तीसरे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जब कि दिया है कि मूलबिंदु त्रिभुज के अध्यंतर में स्थित है।
- A (6, 1), B (8, 2) और C (9, 4) एक समांतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्ष हैं। यदि E भुज DC का मध्य-बिंदु है, तो  $\Delta ADE$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- 3.** A ( $x_1, y_1$ ), B ( $x_2, y_2$ ) और C ( $x_3, y_3$ ) एक  $\Delta ABC$  के शीर्ष हैं।
- A से खींची गई माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
  - AD पर स्थित उस बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिससे  $AP : PD = 2 : 1$  हो।
  - माध्यिकाओं BE और CF पर स्थित क्रमशः ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि  $BQ : QE = 2 : 1$  और  $CR : RF = 2 : 1$  हो।
  - $\Delta ABC$  के केंद्रक के क्या निर्देशांक हैं?
- 4.** यदि बिंदुओं A (1, -2), B (2, 3), C ( $a$ , 2) और D (-4, -3) से एक समांतर चतुर्भुज बनता है, तो  $a$  का मान ज्ञात कीजिए तथा AB को आधार लेकर उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- 5.** किसी स्कूल के विद्यार्थी ड्रिल अभ्यास के लिए, अपने खेल के मैदान में पंक्तियों और स्तंभों में खड़े हैं। A, B, C और D किन्हीं चार विद्यार्थियों के स्थान हैं, जैसा आकृति 7.4 में दर्शाया गया है। क्या यह संभव है कि इस ड्रिल में जसपाल को ऐसे स्थान पर खड़ा कर दिया जाए कि वह A, B, C और D से समदूरस्थ हो? यदि ऐसा है, तो उसकी स्थिति कहाँ होगी?



- 6.** आयुष अपने घर से कार्यालय की ओर चलना प्रारंभ करता है। सीधे कार्यालय जाने के स्थान पर, पहले वह एक बैंक में जाता है, वहाँ से वह अपनी पुत्री के स्कूल और फिर कार्यालय पहुँचता है। यदि घर (2, 4) पर स्थित है, बैंक (5, 8) पर स्थित है, स्कूल (13, 14) पर स्थित है और कार्यालय (13, 26) पर स्थित है, तथा निर्देशांक किलोमीटर में हैं, तो आयुष ने कार्यालय पहुँचने के लिए कितनी अतिरिक्त दूरी चली है? (कल्पना कीजिए कि सभी तय की गई दूरियाँ सरल रेखाओं में हैं।)